Objetivos a cubrir **Código : MAT-CDI.5**

- Límites laterales. Cálculo de límites. Límites en el infinito. Límites infinitos
- Límites notables. Teorema del emparedado.
- Funciones continuas y discontinuas en un punto y en un intervalo.
- Funciones continuas en un intervalo. Discontinuidad. Tipos de discontinuidades.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Calcular el siguiente límite, si es que existe*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x-5}{x^3-2x^2+x}$$

Solución : Observemos que se tiene una no definición de la función en $x=1$, así,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x-5}{x^3-2x^2+x} = \begin{cases} -\infty \\ \text{ó} \\ \infty, \end{cases}$$

entonces,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x-5}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x-5}{x\,(x^2-2x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x-5}{x\,(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}\,\frac{x^3-2x-5}{x},$$

observemos que la expresión $\dfrac{x^3-2x-5}{x}$ es negativa si $x\to 1$, mientras que la expresión $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ tiende a infinito cuando $x\to 1$, por lo tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x-5}{x^3-2x^2+x} = \infty\,(-) = -\infty$$

★

Ejemplo 2 *: Calcular el siguiente límite, si es que existe*

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\pi-x}{\operatorname{sen} x}$$

Solución : Indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Hagamos el cambio de variable

$$u=\pi-x \qquad \Longrightarrow \qquad x=\pi-u,$$

puesto que $x\to\pi$, se tiene que

$$u\to\pi-(\pi) \qquad \Longrightarrow \qquad u\to 0$$

el límite se transforma en

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\pi-x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{sen}(\pi-u)},$$

como,

$$\operatorname{sen}(\pi-u) = \operatorname{sen}\pi\cos u - \cos\pi \operatorname{sen} u = (0)\cos u - (-1)\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u,$$

tenemos,

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{sen}(\pi-u)}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{sen}u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}u}{u}}=1.$$

Luego,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\operatorname{sen}x}=1$$

★

Ejemplo 3 *: Calcular el siguiente límite, si es que existe*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2 2x}{x-x\cos x}$$

Solución : Indeterminación $\dfrac{0}{0}$, escribimos el límite de la siguiente forma,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2 2x}{x-x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2 2x}{x(1-\cos x)}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{1-\cos x}}_{\substack{\uparrow\\ \text{Sólo si los límites existen}}},$$

donde,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1\qquad\leftarrow\qquad\text{Límite notable,}$$

mientras que,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{(1-\cos x)}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x\,(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2\operatorname{sen}x\cos x)^2(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen}^2 x\,(1+\cos x)\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}4(1+\cos x)\cos^2 x=8.$$

Luego

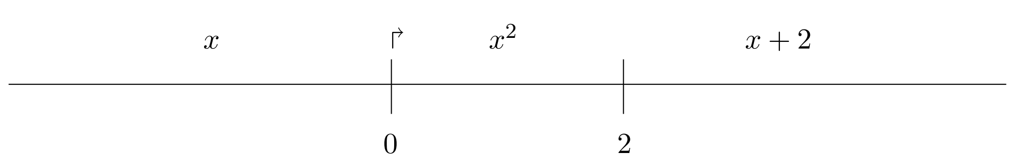
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2 2x}{x-x\cos x}=(1)(8)=8.$$

★

Ejemplo 4 *: Estudie la continuidad de la función f en los puntos $x=0$ y $x=2$ y clasifique las discontinuidades en caso de existir.*

$$f(x)=\begin{cases} x & x<0\\ x^2 & 0\le x<2\\ x+2 & x>2\end{cases}$$

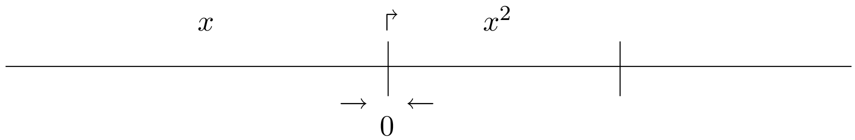
Solución : Tenemos que



Estudiemos la continuidad en $x=0$, para ello verificamos las tres condiciones

1. $f(0) = (0)^2 = 0,$ existe.

2. Para calcular $\lim_{x \to 0} f(x),$ observemos que debemos utilizar los límites laterales



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

como los límites laterales son iguales, entonces

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \leftarrow \quad \text{existe}$$

3. Puesto que, el valor obtenido en la parte 1 es igual al valor del límite obtenido en la parte 2, es decir

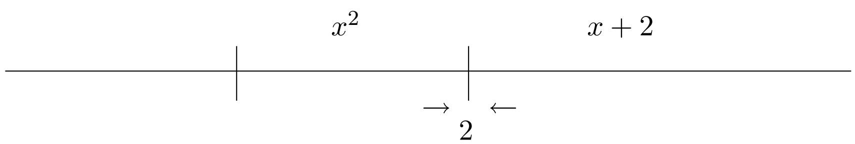
$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

concluimos que la función f es continua en $x = 0.$

Estudiemos la continuidad en $x = 2,$ procederemos de la misma manera

1. $f(2)$ no está definido, por lo tanto, f no es continua en $x = 2.$

Para conocer que tipo de discontinuidad tiene f en $x = 2$ calculamos $\lim_{x \to 2} f(x),$ observemos que debemos utilizar los límites laterales



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4$$

como los límites laterales son iguales, entonces

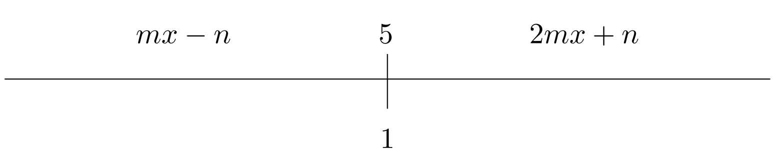
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \quad \leftarrow \quad \text{existe}$$

como el límite existe la función f tiene una discontinuidad evitable en $x = 2.$ ★

Ejemplo 5 : *Encuentre los valores de las constantes de modo que la función dada sea continua*

$$y = \begin{cases} mx - n, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 2mx + n, & x > 1 \end{cases}$$

Solución : Tenemos que



Para que la función f sea continua en $x = 1$ se debe cumplir las tres condiciones

1. $f(1)=5$, existe

2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ exista, así

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to 1^-} (mx-n) = \lim_{x\to 1^+} (2mx+n)$$

3. Adicionalmente

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} m-n=5 \\ \\ 2m+n=5 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad 3m=10 \qquad \Longrightarrow \qquad m=\frac{10}{3}$$

luego, de $m-n=5$, se tiene

$$\frac{10}{3}-n=5 \qquad \Longrightarrow \qquad n=\frac{10}{3}-5 \qquad \Longrightarrow \qquad n=-\frac{5}{3}.$$

Por lo tanto,

$$m=\frac{10}{3} \qquad \text{y} \qquad n=-\frac{5}{3}$$

★

Ejemplo 6 *: Calcular el siguiente límite, si es que existe*

$$\lim_{x\to -\infty} 4\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x + x}{x}\right)$$

Solución : Como la función $\arctan(\cdot)$ es continua, entonces

$$\lim_{x\to -\infty} 4\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x + x}{x}\right) = 4\arctan\left(\lim_{x\to -\infty}\frac{\operatorname{sen} x + x}{x}\right) = 4\arctan\left(\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}+1\right)\right)$$

estudiamos el límite $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}+1\right)$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}+1\right) = \underbrace{\lim_{x\to -\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \lim_{x\to -\infty} 1}_{\substack{\uparrow \\ \text{Sólo si los límites existen}}} = 1 + \lim_{x\to -\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

como,

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dividimos por } x \\ \text{como } x\to-\infty, \text{ se tiene } x<0 \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}{-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \Longrightarrow} \quad \frac{-1}{x} \geq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

como $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=0$, se tiene, por el teorema del emparedado, que

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0,$$

así,

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}+1\right)=1+0=1,$$

luego

$$\lim_{x\to-\infty} 4\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x + x}{x}\right) = 4\arctan(1) = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

★

Ejercicios

1. Demuestre los siguientes límites

   1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x-1}{2x+1} = \frac{5}{2}$
   2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{10x}{x-3} = 10$
   3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3x+8} = \frac{2}{3}$
   4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$
   5. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+1}{x-1} = 5$
   6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5+2x}{3-x} = -2$

2. Escriba la definición de cada uno de los límites

   1. $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$
   2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0$
   3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (2x-1) = \infty$
   4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x-3) = -\infty$
   5. $\displaystyle\lim_{x\to3} (2x-1) = 5$
   6. $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{x-1}{x^2-4} = \infty$

3. Escriba la expresión límite para cada una de las siguientes definiciones

   (a) Para todo $M>0$, existe K_M, tal que, $x<K_M$, implica que, $3x+2>M$.

   (b) Para todo $\varepsilon>0$, existe K_ε, tal que, $x>K_\varepsilon$ implica que, $\left|\dfrac{x}{x-4}-1\right|<\varepsilon$.

   (c) Para todo $\varepsilon>0$, existe K_ε, tal que, $x>K_\varepsilon$ implica que, $\left|\dfrac{1}{x-4}\right|<\varepsilon$.

   (d) Para todo $M>0$, existe $\delta_M>0$, tal que, $|x-4|<\delta_M$ y $x>4$ implica que, $\dfrac{1}{x-4}>M$.

   (e) Para todo $M<0$, existe $\delta_M>0$, tal que, $|x-4|<\delta_M$ y $x<4$ implica que, $\dfrac{1}{x-4}<M$.

4. Calcular los siguientes límites, si es que existen

   1. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{8-t^3}{5t^3+2t-1}$
   2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+7}{x^5-x^3-2}$
   3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x+5}$
   4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^2-x}{x^2-4x}$
   5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-10}{x^3-7x^2+2}$
   6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5+3x^4-x}{(2x-6)^4}$
   7. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{2t}$
   8. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{\sqrt{7-t}+2t}{3t-1}$
   9. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{16x^2+2x-1}}{2x+1}$
   10. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3-x}-x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}$
   11. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{36t^4-5t-14}}{\sqrt{9t^4+6t^3+t^2}}$
   12. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sqrt{2}}+2x}{x^{\sqrt{3}}-x}$
   13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-3}}$
   14. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-3}}$
   15. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{2-3t}{\sqrt{t^2+4}}$
   16. $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{2}{x-3}$
   17. $\displaystyle\lim_{x\to3^-} \frac{2}{x-3}$
   18. $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{2}{x-3}$
   19. $\displaystyle\lim_{x\to4^-} \frac{3}{4-x}$
   20. $\displaystyle\lim_{x\to4^+} \frac{3}{4-x}$
   21. $\displaystyle\lim_{x\to4} \frac{3}{4-x}$
   22. $\displaystyle\lim_{t\to2} \frac{-3}{4-t^2}$
   23. $\displaystyle\lim_{x\to3^-} \frac{x+5}{9-x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x-5}{x^3-2x^2+x}$ 25. $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\sqrt[3]{t^3+8t^2}-t\right)$ 26. $\lim\limits_{t\to 2}\left(\dfrac{9}{8-t^3}-\dfrac{3}{4-t^2}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sec x-\tan x)$ 28. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x}\right)$ 29. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

30. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}$ 31. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ 32. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\csc x$ 33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2-1\right)}{x-1}$

34. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{3x^3-10x}$ 35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$ 36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}$ 37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x-5x}{x}$

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 39. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\cos x}{3+x^4}$ 40. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$ 41. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4\cos x+\operatorname{sen}x}{1+x^5}$

42. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\operatorname{sen}(\pi x)-7}{x^2+x^3-2x}$ 43. $\lim\limits_{t\to\infty} t\left(\sqrt{\dfrac{4t+1}{t}}-2\right)$ 44. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1\right)$

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}3x}$ 46. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}$ 47. $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{x}\right)$ 48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-2\operatorname{sen}x}{4x\operatorname{sen}x}$

49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}2x}$ 50. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos t}}{t^2}$ 51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}$ 52. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$

53. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ 54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x\cos x}$ 55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-b\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}$ 56. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t-\operatorname{sen}t}{t^2\tan t}$

57. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen}x-\cos x}$ 58. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\frac{1}{2}\pi-x}{\cos x}$ 59. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x^2}$ 60. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-6x+3}{\cos 2(x-1)-1}$

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{\tan x}$ 62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\operatorname{sen}x}$ 63. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^6-x^6}{\operatorname{sen}\left(x^2-a^2\right)}$

64. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2x}-\sqrt[3]{\cos^2x}}{1-\tan x}$ 65. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[3]{\operatorname{sen}2x}}{\cos x}$

5. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2\ ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=1\ ; \quad f(0)=3\ ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=2\ ; \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

6. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1\ ; \quad f(1)=3\ ; \quad \lim_{x\to 3} f(x)=1\ ; \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0\ ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

7. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2\ ; \quad f(1)=-2\ ; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=2\ ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty\ ; \quad f(0)=1$$

8. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1\ ; \quad f(1)=1\ ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-1\ ; \quad \lim_{x\to 0} f(x)=2\ ; \quad f(0)\quad \text{No existe}$$

9. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes

$$f(2)=2\ ; \qquad \lim_{x\to 0} f(x) \quad \text{No existe}\ ; \qquad f(0)=3\ ; \qquad \lim_{x\to 1} f(x)=3\ ; \qquad \lim_{x\to 5} f(x)=-\infty$$

10. Si $1\leq f(x)\leq x^2+2x+2$ para todo x, encuentre $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

11. Si $3x\leq f(x)\leq x^3+2$ para todo $0\leq x\leq 2$, evalúe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

12. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

13. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=0$

14. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de las funciones indicadas.

1. $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$	2. $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$	3. $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$	4. $f(x)=\dfrac{3}{9-x^2}$
5. $f(x)=\dfrac{14}{2x^2+7}$	6. $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$	7. $f(x)=\dfrac{x}{x+4}$	8. $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-1}$
9. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+x}$	10. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$	11. $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$	12. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+3x-10}$

15. La recta $y=ax+b$ se llama **asíntota oblicua** de la gráfica de la función $y=f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

de aquí, se tiene que

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right).$$

Encuentre la asíntota oblicua de

$$f(x)=\frac{2x^4+3x^3-2x-4}{x^3-1}$$

16. Encuentre la asíntota oblicua de

$$f(x)=\frac{3x^3+4x^2-x+1}{x^2+1}$$

17. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican y clasifique las discontinuidades en caso de existir.

1. Continuidad en $x=2$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & x\leq 2 \\ 4-x & x>2 \end{cases}$$

2. Continuidad en $x=4$

$$f(x)=\begin{cases} -2x+3 & x<4 \\ x^2 & x\geq 4 \end{cases}$$

3. Continuidad en $x=5$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & x\neq 5 \\ 10 & x=5 \end{cases}$$

4. Continuidad en $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

5. Continuidad en $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x}, & x\neq 0 \\ 3, & x=0 \end{cases}$$

6. Continuidad en $x=-1$; $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) & |x|<1 \\ x & |x|\geq 1 \end{cases}$$

7. Continuidad en $x=0$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-5}{5}, & x\geq 0\\[2ex] x-1, & x<0\end{cases}$$

8. Continuidad en $x=1$; $x=3$

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}|x+1| & |x-2|\leq 1\\[2ex] -1 & |x-2|>1\end{cases}$$

9. Continuidad en $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\[2ex] x, & x\geq 0\end{cases}$$

10. Continuidad en $x=2$

$$f(x)=\begin{cases}2x-3, & x<2\\[2ex] 1, & x=2\\[2ex] x-1, & x>2\end{cases}$$

11. Continuidad en $x=0$; $x=2$

$$f(x)=\begin{cases}x & x<0\\[2ex] x^2 & 0\leq x<2\\[2ex] x & x>2\end{cases}$$

12. Continuidad en $x=1$; $x=2$

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 1\\[2ex] 5-4x, & 1<x<2\\[2ex] 4, & x=2\end{cases}$$

13. Continuidad en $x=4$

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & x<4\\[2ex] 2x-6, & x>4\end{cases}$$

14. Continuidad en $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{x}, & x\neq 0\\[2ex] 3, & x=0\end{cases}$$

15. Continuidad en $x=-3$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x^3+27}, & x\neq -3\\[2ex] 27, & x=-3\end{cases}$$

16. Continuidad en $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq 0\\[2ex] x+1, & x>0\end{cases}$$

17. Continuidad en $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x\neq 0\\[2ex] 2 & x=0\end{cases}$$

18. Continuidad en $x=-1$; $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}x & |x|\leq 1\\[2ex] x^2 & |x|>1\end{cases}$$

19. Continuidad en $x=2$; $x=5$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-5} & x\leq 2\\[2ex] x-5 & 2<x<5\\[2ex] x^2-25 & x>5\\[2ex] 10 & x=5\end{cases}$$

20. Continuidad en $x=1$; $x=5$

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & |x-3|\leq 2\\[2ex] 2 & |x-3|>2\end{cases}$$

18. Dadas las funciones, determinar la continuidad para todo x y si no es continua, localizar la discontinuidad

1. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$

2. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & x\neq 4\\[2ex] 8 & x=4\end{cases}$$

3. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-16}{x-2} & x\neq 2\\[2ex] 16 & x=2\end{cases}$$

4. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x}{10x+50} & x\neq -5\\[2ex] -\dfrac{1}{2} & x=-5\end{cases}$$

5. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x-6}{10x+30} & x\neq 0\\[2ex] 5 & x=0\end{cases}$$

6. $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & x\neq 1\\[2ex] 3 & x=1\end{cases}$$

19. Encuentre los valores de las constantes de modo que la función dada sea continua

1. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\geq 2 \\ cx+6, & x<2 \end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases} mx+5, & x\leq 2 \\ x-1, & x>2 \end{cases}$ 3. $f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\leq 1 \\ 3, & x>1 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 3 \\ ax+b, & 3<x<5 \\ 7, & x\geq 5 \end{cases}$ 5. $f(x)=\begin{cases} -bx^3, & x<4 \\ 6x+1, & x\geq 4 \end{cases}$ 6. $f(t)=\begin{cases} mt, & t<4 \\ t^2, & t\geq 4 \end{cases}$

7. $y=\begin{cases} c\left(x^2-2\right), & x<0 \\ \cos x, & x\geq 0 \end{cases}$ 8. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2 \\ m, & x=2 \end{cases}$ 9. $y=\begin{cases} mx, & x<3 \\ n, & x=3 \\ -2x+9, & x>3 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geq 2 \\ ax^2, & x<2 \end{cases}$ 11. $y=\begin{cases} mx-n, & x<1 \\ 5, & x=1 \\ 2mx+n, & x>1 \end{cases}$ 12. $y=\begin{cases} 2, & x\leq 1 \\ ax+b, & 1<x<3 \\ -2, & x\geq 3 \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x^3}, & x>1 \\ \sqrt{x}, & x\geq 1 \end{cases}$ 14. $f(x)=\begin{cases} x+1 & 1<x<3 \\ x^2+bx+a & |x-2|\geq 1 \end{cases}$

20. Determinar, si los hay, los valores reales en los que la función dada es discontinua y clasificar dicha discontinuidad.

1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ 2. $f(x)=\dfrac{x-1}{\operatorname{sen} 2x}$ 3. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4-1}$ 4. $f(x)=x^3-4x^2+7$

5. $f(x)=\dfrac{\tan x}{x+3}$ 6. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 7. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ 8. $f(x)=\left(x^2-9x+18\right)^{-1}$

9. $f(x)=-\dfrac{x^3}{2}$ 10. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 11. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 12. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

13. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$ 14. $f(x)=\begin{cases} x & x\leq 1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$ 15. $f(x)=\begin{cases} |x-2|+3 & x<0 \\ x+5 & x\geq 0 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x=0 \end{cases}$ 17. $f(x)=\begin{cases} -2x+3 & x<1 \\ x^2 & x\geq 1 \end{cases}$ 18. $y=x+\operatorname{sen} x$

19. $f(x)=\begin{cases} \csc\left(\dfrac{\pi}{6}x\right) & |x-3|\leq 2 \\ 2 & |x-3|>2 \end{cases}$

21. **Teorema 1** *: Si* $\lim_{x\to a} g(x) = L$ *y* f *es continua en* L*, entonces*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L)$$

Si g *es continua en* a *y* f *es continua en* $g(a)$*, entonces se observa que*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(g(a))$$

Use el Teorema antes enunciado para evaluar el límite dado

1. $\lim_{x\to \pi^2} \cos\sqrt{x}$ 2. $\lim_{x\to \pi/6} \operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 3. $\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{sen}(\cos x)$ 4. $\lim_{t\to \pi} (4t+\operatorname{sen} 2t)^3$

5. $\lim_{x\to \pi/2} (1+\cos(\cos x))$ 6. $\lim_{t\to \pi} \cos\left(\frac{t^2-\pi^2}{t-\pi}\right)$ 7. $\lim_{t\to \pi} \tan\left(\frac{\pi t}{t^2+3t}\right)$

8. $\lim_{x\to \pi} \sqrt{x-\pi+\cos^2 x}$ 9. $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}\right)$ 10. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x/2)}{x}\right)$

11. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^3-8}{x^2-4}}$ 12. $\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$ 13. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{\cos x \operatorname{sen}(8\tan x)}{\operatorname{sen} x}}$

14. $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x + x}{x}\right)^8$ 15. $\lim_{x\to \infty} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x+\sqrt{x}}\right)$ 16. $\lim_{x\to 0} \tan\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$

17. $\lim_{x\to -\infty} 4\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x + x}{x}\right)$

22. ¿Cómo debería definirse $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x^2-3}}$ en $x=9$ para que la función resultante fuese continua en ese punto?

23. Considere las funciones

$$f(x) = |x| \qquad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ x-1 & x\geq 0 \end{cases}$$

Trace las gráficas de $f\circ g$ y $g\circ f$. Determine si $f\circ g$ y $g\circ f$ son continuas en $x=0$.

24. Sean f y g funciones continuas en $x=c$, y sea k una constante cualquiera. Demostrar que

(a) La función $F(x) = f(x)+g(x)$ es continua.

(b) La función $F(x) = f(x)\,g(x)$ es continua.

(c) La función $F(x) = kf(x)$ es continua.

(d) La función $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es continua, siempre que $g(c)\neq 0$.

Respuestas: Ejercicios

A.H.: Asíntota horizontal; A.V.: Asíntota vertical; C.: Continua; D.E.: Discontinuidad evitable; D.N.E.: Discontinuidad no evitable

4.1. $-\frac{1}{5}$; 4.2. 0; 4.3. ∞; 4.4. ∞; 4.5. 0; 4.6. $\frac{3}{16}$; 4.7. $-\frac{1}{2}$; 4.8. $\frac{2}{3}$; 4.9. 2; 4.10. -1;

4.11. 2; 4.12. 0; 4.13. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; 4.14. $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$; 4.15. 3; 4.16. ∞; 4.17. $-\infty$; 4.18. No existe; 4.19. ∞;

4.20. $-\infty$; 4.21. No existe; 4.22. No existe; 4.23. ∞; 4.24. $-\infty$; 4.25. $\frac{8}{3}$; 4.26. $\frac{3}{16}$; 4.27. 0;

4.28. ∞; 4.29. $\frac{1}{2}$; 4.30. 0; 4.31. 0; 4.32. 1; 4.33. 2; 4.34. $-\infty$; 4.35. 0; 4.36. $\frac{\alpha}{\beta}$; 4.37. -2;

4.38. $\frac{1}{2}$; 4.39. 0; 4.40. 0; 4.41. 0; 4.42. No existe; 4.43. $\frac{1}{4}$; 4.44. $\frac{1}{3}$; 4.45. $\frac{1}{3}$; 4.46. 0; 4.47. a;

4.48. No existe; 4.49. 0; 4.50. $\frac{1}{4}$; 4.51. $\frac{5}{3}$; 4.52. 0; 4.53. $\sqrt{2}$; 4.54. 0; 4.55. $\frac{a-b}{2}$; 4.56. $\frac{1}{2}$;

4.57. $\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$; 4.58. 1; 4.59. 0; 4.60. $-\frac{3}{2}$; 4.61. 1; 4.62. 1; 4.63. $-3a^4$; 4.64. $-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$; 4.65. No existe;

10. 1; 11. 3; 14.1. A.H.: 0 y A.V.: -1; 14.2. A.H.: 0 y A.V.: -1; 14.3. A.H.: 2 y A.V.: 3;

14.4. A.H.: 0 y A.V.: ± 3; 14.5. A.H.: 0 y A.V.: No tiene; 14.6. A.H.: 2 y A.V.: No tiene;

14.7. A.H.: 1 y A.V.: -4; 14.8. A.H.: 1 y A.V.: ± 1; 14.9. A.H.: 1 y A.V.: 0; 14.10. A.H.: 1 y A.V.: -2;

14.11. A.H.: 0 y A.V.: -1; 14.12. A.H.: No tiene y A.V.: -5; 2; 15. $y = 2x + 3$; 16. $y = 3x + 4$;

17.1. C. $x = 2$; 17.2. D.N.E. $x = 4$; 17.3. C. $x = 5$; 17.4. D.N.E. $x = 0$; 17.5. D.E. $x = 0$; 17.6. C. $x = \pm 1$;

17.7. C. $x = 0$; 17.8. D.N.E. $x = 1$ y $x = 3$; 17.9. D.N.E. $x = 0$; 17.10. C. $x = 2$; 17.11. C. $x = 0$; D.N.E. $x = 2$;

17.12. D.N.E. $x = 1$; C. $x = 2$; 17.13. D.E. $x = 4$; 17.14. D.E. $x = 0$; 17.15. D.E. $x = -3$; 17.16. D.N.E. $x = 0$;

17.17. D.E. $x = 0$; 17.18. D.N.E. $x = -1$; C. $x = 1$; 17.19. D.N.E. $x = 2$; D.E. $x = 5$; 17.20. D.N.E. $x = 1$ y $x = 5$;

18.1. D.N.E. $x = 1$ y $x = 2$; 18.2. C.; 18.3. D.N.E. $x = 2$; 18.4. C.; 18.5. D.E. $x = 0$; 18.6. C.;

19.1. $c = -\frac{1}{2}$; 19.2. $m = -2$; 19.3. $a = 3$; 19.4. $a = 3,\ b = -8$; 19.5. $b = -\frac{25}{64}$; 19.6. $m = 4$; 19.7. $c = -\frac{1}{2}$;

19.8. $m = 4$; 19.9. $m = 1, \quad n = 3$; 19.10. $a = 2$; 19.11. $m = \frac{10}{3}, \quad n = -\frac{5}{3}$; 19.12. $a = -2, \quad b = 4$;

19.13. $a = 1$; 19.14. $b = -3, \quad c = 4$; 20.1. No tiene; 20.2. $x = \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{N}$, D.N.E.; 20.3. $x = \pm 1$, D.E.;

20.4. No tiene; 20.5. $x = -3,\ x = (2n-1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{N}$, D.N.E.; 20.6. $x = -1$, D.E.; 20.7. $x = \pm 2$, D.N.E.;

20.8. $x = 3,\ x = 6$, D.N.E.; 20.9. No tiene; 20.10. No tiene; 20.11. $x = 1$, D.N.E.;

20.12. $x = -2,\ x = 5$, D.E. $x = -2$; D.N.E. $x = 5$; 20.13. $x = -2$, D.N.E.; 20.14. No tiene; 20.15. No tiene;

20.16. $x = 0$, D.N.E.; 20.17. No tiene; 20.18. No tiene; 20.19. $x = 1,\ x = 5,\ x = 6n,\ n \in \mathbb{N}$, D.N.E.;

21.1. -1; 21.2. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; 21.3. 0; 21.4. $64\pi^3$; 21.5. 2; 21.6. 1; 21.7. $\tan\left(\frac{\pi}{\pi+3}\right)$; 21.8. 1; 21.9. -1;

21.10. 1; 21.11. $\sqrt{3}$; 21.12. $\frac{1}{2}\pi$; 21.13. 2; 21.14. 1; 21.15. $\frac{1}{2}\pi$; 21.16. 0; 21.17. π;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Farith Briceño

e-mail : farith_72@hotmail.com